
10.15 CSP-S 模拟赛讲评

By Vllilac Peng

BIT, ICS

vlilac_peng@gmail.com



总结一下这次测试

400 300 320

- 题目整体难度略低于 CSP - S，可以理解为是接下来培训的最低难度。
- (本次比赛成绩 * 变化因子 \approx CSP-S 分数)。个人预期，变化因子在 0.6~0.85。
- 当然，还有十几天，没考好的同学也不要气馁，奋战到最后。
- 题目难度：

◉ T1 较简单（有趣），并不是 S 组题。 纯思维题

◉ T2 在 S 组 T1~T2 附近难度。 套路 + ds set

◉ T3 在 S 组 T2~T3 附近难度。 纯

◉ T4 在 S 组 T3 附近难度。主要是思维难度 比较大 一些，不太好评判。

NIOIP 2017 / 2018

小范围题感

树

第一题

小花最近喜欢研究数列问题。于是 ta 想要送你一道与数列有关的签到题

小花给了你一个无穷整数数列 $\{p_k\}$ 。并希望你数出该数列里有多少个不同的数。

为了表示友好，ta 决定给你透露一点信息：

对于数列 $\{p_k\}$ 中的任意 $k \geq 3$ ，满足 $p_k = \sqrt{(p_{k-1} - p_{k-2})^2}$ 。同时，小花会给出你 p_1 和 p_2 。

- 共 57 人 AC。有些人因为奇奇怪怪的边界原因挂到了 90。

数论

gcd ★

更相减损

$$a_3 = |a_2 - a_1|$$

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1} - a_{k-2} & (a_{k-1} \geq a_{k-2}) \\ a_{k-2} - a_{k-1} & (a_{k-2} \geq a_{k-1}) \end{cases}$$

非负

$$a_k = |a_{k-1} - a_{k-2}|$$

初中 math

p_1, p_2

有限项

0, 0, ...

$|p_{k-1} - p_{k-2}|$

✗

第一题

【简要题解】

观察这个数列的运作方式，它的本质就是更相减损术的每一步。但直接进行更相减损术太慢，我们可以通过辗转相除法来加快这个进程，并在辗转相除法时累加答案即可。

gcd: log

减法

log

↓

取模：多次减法。

第二题

2.1 Description

小花平时很喜欢烘焙。

小花有 n 个好看的椭圆型饼干盒。某天，ta 心血来潮烤制了 m 块椭圆型曲奇饼干 ($n > m$)。

现在小花想给每一块饼干安排一个独一无二的饼干盒，然后送给 ta 的动物朋友们。但是小花对尺寸有严格的要求：

如果你了解过椭圆，你可能会知道椭圆有两个属性：长轴（长直径）长度 a 和短轴（短直径）长度 b 。只有某个饼干盒的长轴和短轴都大于等于某块饼干的两倍，小花才会有可能把这块饼干放到这个饼干盒里当做礼物送出。

现在，给出所有饼干盒和饼干的长轴长度和短轴长度。请你告诉小花，最优的调度下小花能够送出多少块曲奇饼干呢？

共 4 人 AC，得分情况甚至不如 T3。但理论上应该是比 T3 简单的。

$\left\{ \begin{array}{l} n \text{ 个 } a_i \\ m \text{ 个 } b_i \end{array} \right.$ 匹配 $a_i \geq b_i$

饼干数 预处理 先进的网络流 建模 优化 ds

$\times 2$

贪心

不会
分子
分母

$a > b$
 $c > d$

$a < b$
 $c < d$

大大
小小

第二题

set { 插入
二分
删除

push/insert



(x,y) 两个长度
按照 ~~1~~ 排序
x 或 y

收集为一维的信息

不难想到一个贪心：小饼干盒装小饼干，大饼干盒装大饼干。

所以对饼干盒和饼干先分别按照 a_i 从小到大排序，扫描每个饼干，找到符合要求的、 b_i 最小的饼干盒就好了。复杂度 $O(n^2)$ 。

2.3 100 分

实力 \Leftrightarrow 眼界

不难发现其实我们 60 分找到 b_i 大于等于某个值的最小的饼干盒，类似于在二分。那么也就是需要一个支持二分 and 删除的容器。multiset 处理即可。复杂度 $O(n \log n)$ 。

不懂啊，你们为什么想到用 set，但是想不到用 multiset 呢！！

注意细节!!!

挂分

0分



第三题

3.1 Description

众所周知，小花是大自然的好朋友。

某天，小花去拜访了自己许久不见的树上朋友们。在小花眼前的是一棵点数为 n 的树，树上的每个结点居住着小花的一位朋友，手里均拿着一个数字 1。

定义 $x \rightarrow y$ 为树上朋友 x 到 y 的一条路径， $s(x, y)$ 为该路径上所有树上朋友手中数字的异或和， $d(x, y)$ 表示 $x \rightarrow y$ 上的边数。每个树上朋友 x 都对小花提出了一个同样的问题：

记 $u \neq x, v \neq x$ 为小花的另外两个树上朋友。若 $s(u, x) = 1$ 而 $s(v, x) = 0$ ，则 (u, v) 这对朋友会在朋友 x 处产生 $d(u, x) \times d(v, x)$ 的友好值。而朋友 x 的幸福度为所有树上朋友在 x 处产生的友好值之和。

现在，小花想知道树上所有点的幸福度在 mod 720021013 下分别是多少。你能帮帮 ta 吗？

共 6 人 AC。奇奇怪怪的 90 之类的，要么是常数挂了，要么是边界算挂了。
这题还是很友善吧！给了巨大的部分分。



第三题

比较传统+套路。

DP 过程中的细节处理
难度因人而异。

首先需要简化条件（当然暴力需不需要另说）。不难发现，由于每个点的点权都是 1，所以异或和为 1 相当于经过了偶数条边，异或和为 0 相当于经过了奇数条边。

因此题目相当于在说，如果 $d(u, x)$ 为偶数， $d(v, x)$ 为奇数，那么会产生 $d(u, x) \times d(v, x)$ 的贡献。

4.1 30 分

可以枚举每个点 x ，然后枚举每个 u, v ，处理一下细节之类的。

4.2 50 分

我们思考，假设有四个点，两奇两偶，那么他们产生的贡献是

$$\begin{aligned} & d(u, x) \times d(v, x) + d(u, x) \times d(w, x) + d(y, x) \times d(v, x) + d(y, x) \times d(w, x) \\ &= [d(u, x) + d(y, x)] \times [d(v, x) + d(w, x)] \end{aligned}$$

所以可以枚举每个点 x ，然后从这个点开始 bfs，并且用两个值 s_1, s_0 去记录到 x 距离为奇数/偶数的距离和，那么每 bfs 到一个新点，贡献都是可算的。

4.3 100 分

不难发现上述过程可以 up & down DP 出来。两遍 dfs 即可。复杂度线性。



第四题

S 省由 n 个城市和 m 条道路组成。某天你听说 S 省的新能源汽车质量很好。于是你打算到 S 省买辆新能源车。

你发现一两新能源汽车的排污量可以用一个介于 $(-\infty, +\infty)$ 内的整数 p 表示。当你正犹豫时，你发现店里电视上正在播出 S 省环境治理署的署长小花宣布了 S 省的新的通行政策：为省内连接各城市的道路设置一个排污上限 e_i 。当某辆车的排污量 $p > e_i$ 时，**则该车不允许通过这条道路**。

你很担心自己买完了车却开不出 S 省。于是你打算对 S 省整体情况做个调查。我们定义城市 i 的环境严格指数为 s_i 。 s_i 定义如下

$$s_i = \sum_{p=-\infty, p \in \mathbb{Z}}^{\infty} r(i, p)$$

其中 \mathbb{Z} 表示整数集。 $r(i, p)$ 的意义为，若当从城市 i 出发开着一辆排污量为 p 的车时能达到 S 省的 x 个城市，而若从城市 i 出发开着一辆排污量为 $p + 1$ 的车时能达到 S 省的 y 个城市时， $r(i, p) = (x - y)^2$ 。

现在你需要知道每个城市的环境严格指数 s_i 分别是多少。

个人感觉这题比较 hard。

思维难度上可能接近 S 组的顶部水平。



第四题

- 共一人 AC 。挺好的，至少证明我数据没挂（雾）。
- 为了得高分，你需要关注到如下信息：
 - 1. 虽然值域的范围可以横跨整个数轴，但并不是每个值都有意义（对答案的贡献为 0）。所以最终有价值的排污量在数轴上会是一些离散的点。
 - 2. 整张图有意义的边集只有最大生成树中包含的边。所以这不是一个图模型，是一个树模型。
 - 3. 来思考 $(y - x)$ 的意义：变化后能多走的点的数目。
 - 4. 综上，现在问题变成了给定一棵树，我们需要关注每个点到其他点路径上的最大值并分类。假设 $x - u, x - v$ 路径上最大值相同，那么他们都会在该最大值处产生数量为 1 的贡献。



第四题

- 那这其实就有比较多的做法了。一种比较 `ez` 的做法如下：
- 其实本质是利用了最大生成树时，我们对边的处理是顺序的，后加的边一定会更小，这其实就提供了一个天然的分类方式。

本题是最大生成树基础上的一点变形。

用 *kruscal* 算法求最大生成树，在并查集合并时，把原本的一个根连向另一个根改成两个根都连向一个新建的节点，并把当前正在处理的边的权值赋给这个新节点做点权。这样形成的结构会是一棵树。

一个点的答案大致上是树的根到自己的路径上，相邻两个节点的子树叶节点数的平方和。需要注意的是父子两个节点权值相同的情况，这个部分需要特殊处理。

最后

- Std 和这个讲稿会上传到文件区，有需要的话自己看吧。
- 有一对一授课需求/出题需求欢迎联系我：
 - vlilac_peng@gmail.com
 - Q: 2836531293

